

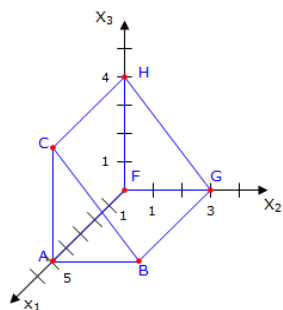
# Abiturprüfung Mathematik 2008 Baden-Württemberg Allgemeinbildende Gymnasien Wahlteil – Geometrie II

## Lösung der Aufgabe 2.1 und 2.2

☞ Klaus Messner, klaus\_messner@web.de

### Lösung:

a) Darstellung des Prismas in einem Koordinatensystem:



**Bestimmung der Ebenengleichung für E:**

Mit den jeweiligen Ortsvektoren hat man

$$E: \vec{x} = \vec{g} + r(\vec{h} - \vec{g}) + s(\vec{b} - \vec{g})$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Bestimmung des Normalenvektors  $\vec{n}$ :**

Die Bedingungen  $\vec{n} \perp \vec{GH}$  und  $\vec{n} \perp \vec{GB}$  liefern zwei Gleichungen:

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -3n_2 + 4n_3 = 0 \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 5n_1 = 0$$

Aus der zweiten Gleichung entnehmen Sie  $n_1 = 0$ . In der ersten Gleichung kann eine Variable frei gewählt werden z.B.  $n_3 = 3$ , dann folgt  $n_2 = 4$ .

1

### Aufgabe II 2

2

Die Punkte  $A(5|0|0)$ ,  $B(5|3|0)$ ,  $C(5|0|4)$ ,  $F(0|0|0)$ ,  $G(0|3|0)$  und  $H(0|3|4)$  sind die Ecken eines dreiseitigen Prismas mit Grundfläche ABC.

a) Stellen Sie das Prisma in einem Koordinatensystem dar.  
Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E, in der die Fläche BGHC liegt.  
Unter welchem Winkel schneidet E die  $x_1x_2$ -Ebene ?

(6 VP)

b) Im Prisma liegt ein Zylinder mit Radius 0,5 und Grundkreismittelpunkt  $M(0|0,5|0,5)$ , dessen Achse parallel zur  $x_1$ -Achse verläuft.  
Ermitteln Sie die Abstände des Punktes M von den drei rechteckigen Seitenflächen des Prismas.  
Berührt der Zylinder alle drei rechteckigen Seitenflächen des Prismas?  
Ein anderer Zylinder mit Radius r und Grundkreismittelpunkt  $M^*(0|r|r)$ , dessen Achse ebenfalls parallel zur  $x_1$ -Achse ist, soll alle drei rechteckigen Seitenflächen des Prismas von innen berühren.  
Bestimmen Sie den Radius r dieses Zylinders.

(6 VP)

3

Aus der zweiten Gleichung entnehmen Sie  $n_1 = 0$ . In der ersten Gleichung kann eine Variable frei gewählt werden z.B.  $n_3 = 3$ , dann folgt  $n_2 = 4$ . Damit

ist  $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ . Daraus lässt sich die Koordinatenform ansetzen

E:  $0x_1 + 4x_2 + 3x_3 = c$  mit einem noch zu bestimmenden  $c \in \mathbb{R}$ . Der Punkt G liegt in E, daher können wir die Koordinaten von G einsetzen und erhalten  $4 \cdot 3 + 3 \cdot 0 = 12 = c$ .

**Ergebnis:** Die gesuchte Koordinatenform ist E:  $4x_2 + 3x_3 = 12$ .

**Bestimmung des Winkels zwischen E und der  $x_1x_2$ -Ebene:**

Ein Normalenvektor der  $x_1x_2$ -Ebene ist z.B.  $\vec{n}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Den Normalenvektor

von E haben wir bereits und wir müssen nur noch den Winkel zwischen beiden Normalenvektoren berechnen. Mit der Winkelformel gilt:

4

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{n}'|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}'|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{3}{5 \cdot 1} = 0,6$$

**Ergebnis:**  $\alpha \approx 53,13^\circ$  ist der Schnittwinkel der beiden Ebenen.

**Bestimmung des Abstands von A zur Geraden, welche die Strecke CG enthält.**

Lösungsplan:

- Aufstellen der Geradengleichung für die Gerade g, welche die Strecke CG enthält.

Mit den jeweiligen Ortsvektoren gilt:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

- Bestimmung der Ebene E, die senkrecht zu g steht und den Punkt A enthält.  
Der Richtungsvektor von g ist der Normalenvektor von E. Das liefert den Ansatz E:  $-5x_1 + 3x_2 - 4x_3 = d$  mit einem noch zu bestimmenden  $d \in \mathbb{R}$ . Der Punkt A gehört zu E, daher können wir die Koordinaten einsetzen und erhalten  $-5 \cdot 5 + 3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 = -25 = d$ . Die Ebenengleichung lautet nun E:  $-5x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -25$ .

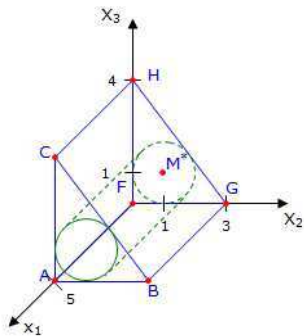
- Bestimmung des Schnittpunkts S von g mit E.  
Setze g in E ein und erhalte  $-5(5-5r) + 3(0+3r) - 4(4-4r) = -25 \Leftrightarrow -25 + 25r + 9r - 16 + 16r = -25 \Leftrightarrow 50r = 16 \Leftrightarrow r = \frac{8}{25}$ . Eingesetzt in g ergibt sich der Schnittpunkt S  $\left( \frac{17}{5} \mid \frac{24}{25} \mid \frac{68}{25} \right)$ .

- Bestimmung des Abstands durch  $d = |\overline{AS}|$

$$d = |\overline{AS}| = \left| \begin{pmatrix} 17/5 \\ 24/25 \\ 68/25 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -8/5 \\ 24/25 \\ 68/25 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\left(\frac{-8}{5}\right)^2 + \left(\frac{24}{25}\right)^2 + \left(\frac{68}{25}\right)^2} \approx 3,3$$

**Ergebnis:** Der Abstand von A zu g beträgt etwa 3,3LE.

b)



Der Abstand  $d_1$  zur  $x_1x_3$ -Ebene und  $d_2$  zur  $x_1x_2$ -Ebene ist direkt an den Koordinaten von M ablesbar, da der Grundkreis in der  $x_2x_3$ -Ebene liegt. Es gilt  $d_1 = d_2 = 0,5$ . Für den Abstand  $d_3$  von M zur Ebene BGHC bilden wir zunächst die HNF der Ebenengleichung E:  $4x_2 + 3x_3 = 12$  (aus a)

bekannt) mit dem Normalenvektor  $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

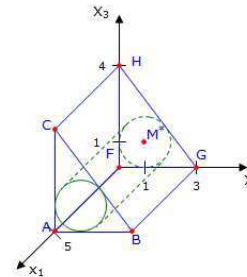
Für die HNF brauchen wir die Länge von  $\vec{n}$ . Es folgt  $|\vec{n}| = \sqrt{0^2 + 4^2 + 3^2} = 5$ . Damit ergibt sich die HNF

$$\text{zu E: } \frac{4x_2 + 3x_3 - 12}{5} = 0$$

Einsetzen der Koordinaten von M liefert  $d_3 = \frac{|4 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,5 - 12|}{5} = 1,7$

Der Abstand zur Seitenfläche BGHC ist größer als der Radius  $r = 0,5$  des Grundkreises.

**Ergebnis:** Der Zylinder berührt die Seitenfläche nicht.



Der Zylinder hat jetzt den noch unbekanntem Radius  $r$ . Die Koordinaten des Mittelpunkts  $M^*$  des Grundkreises sind dann  $M^*(0|r|r)$ . Der Abstand zur  $x_1x_3$ -Ebene und der Abstand zur  $x_1x_2$ -Ebene ist somit  $d_1 = d_2 = r$ . Wenn der Abstand zur Seitenfläche  $r$  sein soll, muss gelten  $d_3 = |4r + 3r - 12|/5 = r$  (HNF von E siehe vorheriger Aufgabenteil). Es folgt  $|7r - 12| = 5r$ .  
Falls  $7r - 12 \geq 0$  folgt  $7r - 12 = 5r$  und damit  $r = 6$ .  
Falls  $7r - 12 < 0$  folgt  $-7r + 12 = 5r$ , also  $r = 1$ . Nur  $r = 1$  kann eine Lösung sein, denn für  $r = 6$  würde der Zylinder über das Prisma hinausragen.

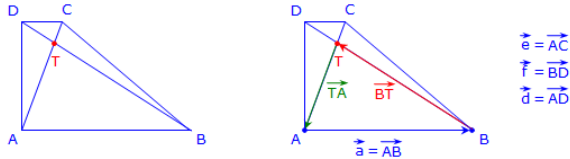
**Ergebnis:** Für den Radius  $r = 1$  berührt der Zylinder die Seitenfläche.

**Aufgabe II 2.2**

In einem Viereck ABCD gilt für die Diagonale AC:  $\vec{AC} = 0,4 \cdot \vec{AB} + \vec{AD}$ .  
Zeichnen Sie ein solches Viereck ABCD.

In welchem Verhältnis wird die Diagonale AC von der anderen Diagonalen geteilt?

(4VP)

**Lösung:**

Suchen Sie sich einen geschlossenen Vektorzug der den Teilungspunkt T enthält, beispielsweise  $\vec{a} + \vec{BT} + \vec{TA} = \vec{0}$ . Ersetzen Sie nun die noch unbekanntenen Vektoren  $\vec{BT}$  und  $\vec{TA}$  durch bekannte Größen.

$\vec{BT}$ : Es gilt  $\vec{a} + \vec{f} = \vec{d} \Leftrightarrow \vec{f} = \vec{d} - \vec{a}$ . Andererseits ist  $\vec{BT} = s \cdot \vec{f}$  so dass folgt  $\vec{BT} = s \cdot (\vec{d} - \vec{a})$  mit einem noch unbekanntem  $s \in \mathbb{R}$ .

$\vec{TA}$ : Vorausgesetzt, war  $\vec{AC} = 0,4 \cdot \vec{AB} + \vec{AD}$ . Mit unseren Bezeichnungen also  $\vec{e} = 0,4 \cdot \vec{a} + \vec{d}$ . Nun gilt aber auch  $\vec{TA} = t \cdot \vec{CA} = -t \cdot \vec{AC} = -t \vec{e}$  mit einem noch unbekanntem  $t \in \mathbb{R}$ . Also folgt  $\vec{TA} = -t \cdot (0,4 \cdot \vec{a} + \vec{d})$ .

Diese beiden Teilergebnisse setzen wir in den Vektorzug ein und erhalten

$$\begin{aligned} \vec{a} + s \cdot (\vec{d} - \vec{a}) - t \cdot (0,4 \cdot \vec{a} + \vec{d}) &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \vec{a} + s \cdot \vec{d} - s \cdot \vec{a} - 0,4t \cdot \vec{a} - 0,4t \cdot \vec{d} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow (1 - s - 0,4t) \cdot \vec{a} + (s - t) \cdot \vec{d} &= \vec{0} \end{aligned}$$

Die Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{d}$  sind linear unabhängig, daher kann die Vektorgleichung nur gelöst werden, wenn alle Koeffizienten gleichzeitig Null sind. Das führt zu den Gleichungen I:  $1 - s - 0,4t = 0$  und II:  $s - t = 0$ . Aus Gleichung II: folgt sofort  $s = t$ , eingesetzt in I: ergibt sich  $1 - t - 0,4t = 0 \Leftrightarrow -1,4t = -1$  also  $t = 1/1,4 = 10/14 = 5/7$  und damit auch  $s = 5/7$ .

Das bedeutet, dass die Strecke AC in sieben Teile aufgeteilt wird, wobei fünf Teile auf die Strecke AT und die restlichen zwei Teile auf die Strecke TC entfallen. Das Teilungsverhältnis ist also 5:2, formal ausgedrückt  $\frac{AT}{TC} = \frac{5}{2}$ .

**Ergebnis:** Die Diagonale AC wird von der anderen Diagonalen BD im Verhältnis 5:2 geteilt.