

Abiturprüfung Mathematik 2008 Baden-Württemberg Allgemeinbildende Gymnasien Wahlteil – Geometrie II

Lösung der Aufgabe 1

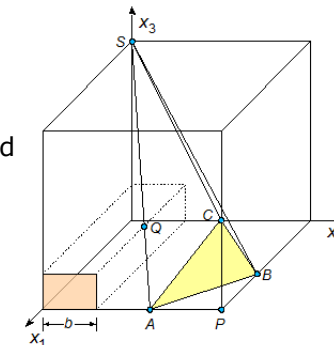
☞ Klaus Messner, klaus_messner@web.de

1

Aufgabe II 1

2

In einem Würfel mit den Eckpunkten $O(0|0|0)$, $P(10|10|0)$ und $S(0|0|10)$ befindet sich eine Pyramide mit einem Dreieck als Grundfläche und der Spitze S (vgl. Skizze). Die Eckpunkte der Pyramidengrundfläche sind $A(10|6|0)$, $B(6|10|0)$ und $C(10|10|5)$



- a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E , in der die Grundfläche der Pyramide liegt.
Welchen Winkel schließen die Grundflächen von Würfel und Pyramide ein?
Untersuchen Sie, ob die Höhe der Pyramide auf der Diagonalen PS des Würfels liegt.
(Teilergebnis: $E: 5x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 80$) (6 VP)
- b) Wie viel Prozent des Würfelvolumens beträgt das Pyramidenvolumen? (5 VP)

- c) Zusätzlich zur Pyramide soll nun noch ein Quader der Breite b in den Würfel gelegt werden. Die Abmessungen des Quaders werden so gewählt, dass er die Pyramide nur in einem Punkt Q der Pyramidenkante AS berührt (vgl. Skizze).
Welches Volumen hat ein solcher Quader mit der Breite $b=4$?
Welche Werte kann das Volumen eines solchen Quaders annehmen, wenn die Breite b variabel ist? (5 VP)

Lösung:

- a) **Koordinatengleichung von E :**

Lösungsplan: Parameterform der Ebenengleichung aufstellen \rightarrow Normalenvektor finden \rightarrow Koordinatenform der Ebenengleichung bestimmen.

Als Stützvektor nehmen wir den dem Punkt A zugehörigen Ortsvektor

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$. Die beiden Richtungsvektoren \vec{u} und \vec{v} erhalten wir aus den zu B und C korrespondierenden Ortsvektoren mit $\vec{u} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

und $\vec{v} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

3

Damit ist E gegeben durch: $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

Einen Normalenvektor, der senkrecht zu den beiden Richtungsvektoren steht, bekommen wir aus dem Vektorprodukt der beiden Richtungsvektoren:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 - 0 \\ 0 + 20 \\ -16 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ -16 \end{pmatrix}$$

Da die Länge von \vec{n} keine Rolle spielt können wir noch durch -4 teilen, damit wir für weitere Berechnungen einfachere Zahlen bekommen.

Wir erhalten: $\vec{n} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$

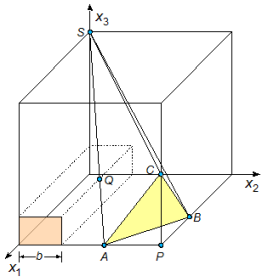
Mit dem Normalenvektor haben wir für die Koordinatenform den Ansatz $E: -5x_1 - 5x_2 + 4x_3 = c$ mit einem noch zu bestimmenden $c \in \mathbb{R}$. Da der Punkt A in E liegt, setzen wir dessen Koordinaten ein und erhalten $-5 \cdot 10 - 5 \cdot 6 + 4 \cdot 0 = -80 = c$. Nach Multiplikation mit -1 haben wir die endgültige Koordinatenform der Ebenengleichung $E: 5x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 80$.

4

Winkel zwischen x_1x_2 -Ebene und Pyramidengrundfläche

Bestimme den Winkel zwischen den zugehörigen Normalenvektoren. Ein

Normalenvektor der x_1x_2 -Ebene ist beispielsweise $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Es folgt:



$$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{4}{\sqrt{66}} \approx 0,4923$$

Ergebnis: Der Winkel zwischen den beiden Ebenen ist $\alpha \approx 60,5^\circ$.

Liegt die Pyramidenhöhe auf der Diagonalen PS?

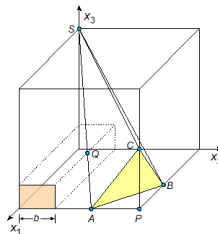
Den Richtungsvektor \vec{u} der Diagonalen PS berechnen Sie aus den zugehörigen Ortsvektoren $\vec{u} = \vec{s} - \vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -10 \\ 10 \end{pmatrix}$. Als Richtungsvektor der

Geraden auf der die Höhe der Pyramide liegt, kann man den Normalen-

Nach Einsetzen ergibt sich $\vec{m} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Die Höhe des Dreiecks ist gegeben durch

$$|\overline{MC}| = \vec{c} - \vec{m} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{33}$$



Für die Dreiecksfläche brauchen wir noch die Länge der Seite \overline{AB} .

Es gilt: $|\overline{AB}| = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{(-4)^2 + 4^2 + 0^2} = \sqrt{32}$

Die Dreiecksfläche ergibt sich dann zu

$$A_\Delta = \frac{1}{2} |\overline{AB}| \cdot |\overline{MC}| = \frac{1}{2} \sqrt{32} \cdot \sqrt{33} = 2 \cdot \sqrt{66}$$

Damit hat man das Volumen der Pyramide:

$$V_P = \frac{1}{3} A_\Delta \cdot h = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{66} \cdot \frac{120}{\sqrt{66}} = 80$$

3. Verhältnis der Volumina: $\frac{V_P}{V_w} = \frac{80}{1000} = 0,08$

vektor \vec{n} der Ebene E verwenden. Nun sind \vec{u} und \vec{n} aber offenbar linear unabhängig (die Vektoren sind nicht Vielfache voneinander).

Ergebnis: Die Höhe der Pyramide liegt nicht auf der Diagonalen SP.

b) Berechnungsplan:

1. Höhe der Pyramide aus dem Abstand von S zur Grundfläche E berechnen.
2. Volumen des Würfels berechnen.
3. Volumina ins Verhältnis setzen.

1. Abstand von S zu E:

Stelle die Ebenengleichung in der Hesse'schen Normalform dar.

Mit $|\vec{n}| = \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2 + 4^2} = \sqrt{66}$ ist ergibt sich die HNF zu

E: $\frac{5x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 80}{\sqrt{66}} = 0$. Setze die Koordinaten von S ein und erhalte

die Höhe h mit $h = \frac{|5 \cdot 0 + 5 \cdot 0 - 4 \cdot 10 - 80|}{\sqrt{66}} \approx 14,77$

2. Aufgrund der Koordinaten sieht man $|\overline{AC}| = |\overline{BC}|$, d.h. das Dreieck ABC ist gleichschenkelig. Damit steht C über der Mitte M von $|\overline{AB}|$ und es gilt mit den jeweiligen Ortsvektoren $\vec{m} = \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$

Ergebnis: Das gesuchte Verhältnis der beiden Volumina ist **0,08**, was **8%** entspricht. Das bedeutet, die Pyramide nimmt 8% des Würfelvolumens ein.

c) Wir leiten Sie zuerst die allgemeine Volumenformel her und setzen Sie dann $b=4$ ein! Zur Herleitung gehen wir schrittweise vor:

Bestimme die Geradengleichung der Geraden h, auf der die Strecke AS liegt.

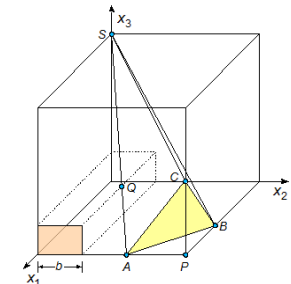
$$h: \vec{x} = \vec{s} + t(\vec{s} - \vec{a}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -10 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Bestimme die Geradengleichung der Geraden g, die die rechte obere Kante des Quaders darstellt.

$$g: \vec{x} = \vec{q} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gleichsetzen von g mit h liefert den Schnittpunkt Q:

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ b \\ q_3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -10 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} q_1 \\ b \\ q_3 - 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10t - r \\ -6t \\ 10t \end{pmatrix}$$



Wir lesen ab $b = -6t$. Daraus ergibt sich $t = -\frac{1}{6}b$. Die q_3 -Koordinate von Q ist die Höhe des Quaders. Aus obiger Gleichung lesen wir ab $q_3 - 10 = 10t$ und nach Einsetzen von t : $q_3 - 10 = -\frac{10}{6}b \Leftrightarrow q_3 = 10 - \frac{10}{6}b$ und dies ist die Höhe h des Quaders. Die Breite des Quaders ist b , die Länge ist 10, was man aus den Koordinaten ablesen kann. Für das Volumen gilt dann:

$$V(b) = 10bh = 10b\left(10 - \frac{10}{6}b\right) = 100b - \frac{100}{6}b^2$$

Für $b = 4$ folgt: $V(4) = 400 - \frac{1600}{6} = \frac{400}{3}$

Ergebnis: Die allgemeine Volumenformel für den Quader lautet

$$V(b) = 100b - \frac{50}{3}b^2 \quad \text{und es gilt} \quad V(4) = \frac{400}{3}$$

Bestimmung eines Wertes für b so dass das Volumen des Quaders maximiert wird:

Aus $V(b) = 100b - \frac{50}{3}b^2$ folgt $V'(b) = 100 - \frac{100}{3}b$. Mit $V'(b) = 0$ folgt

$$100 - \frac{100}{3}b = 0 \Leftrightarrow 100 = \frac{100}{3}b \Leftrightarrow b = 3$$

Ergebnis: Für $b = 3$ wird das Volumen des Quaders maximal und beträgt dann $V(3) = 150$. Das Volumen des Quaders kann nur zwischen $V(0) = 0$ und dem maximalen Wert $V(3) = 150$ variieren, also gilt $0 \leq V(b) \leq 150$.