Abiturprüfung Mathematik 2008 Baden-Württemberg Allgemeinbildende Gymnasien Wahlteil – Analysis I

Lösung der Aufgaben 3.1 und 3.2

Klaus Messner, klaus_messner@web.de

Aufgabe I 3.1 (Schwerpunkte: e-Funktion, Wachstum und Dierenzialgleichungen, Folgen)

Ein Behälter hat ein Fassungsvermögen von 1200 Liter. Die enthaltene Flüssigkeitsmenge zum Zeitpunkt t wird beschrieben durch die Funktion f mit

$$f(t)=1000-800\cdot e^{-0,01t};\quad t\geq 0 \quad \text{(t in Minuten, f(t) in Liter)}$$

a) Zu welchem Zeitpunkt ist der Behälter zur Hälfte gefüllt?
Zeigen Sie, dass die Flüssigkeitsmenge im Behälter stets zunimmt.
Bestimmen Sie die mittlere Flüssigkeitsmenge während der ersten Stunde.
Aus Sicherheitsgründen darf die Flüssigkeitsmenge höchstens 85% des Fassungsvermögens betragen. Wird diese Vorschrift zu jeder Zeit eingehalten? Begründen Sie Ihre Antwort.

(6 VP)

b) In einem anderen Behälter mit einem Zufluss und einem Abfluss befinden sich zu Beginn ebenfalls 200 Liter Flüssigkeit. Einerseits fließen pro Minute 10 Liter zu, andererseits beträgt die momentane Abflussrate 1% des jeweiligen Inhalts pro Minute. Dieser Vorgang wird durch die Differenzialgleichung B'(t) = a-b·B(t) beschrieben.
Geben Sie a und b an.
Zeigen Sie, dass f eine Lösung dieser Differenzialgleichung ist.

(3 VP)

c) Der Vorgang in b) wird nun so geändert, dass pro Minute 12 Liter zufließen und die momentane Abflussrate 2% des Inhalts pro Minute beträgt. Die anfängliche Flüssigkeitsmenge ist wiederum 200 Liter. Ermitteln Sie einen Funktionsterm, der diesen Vorgang beschreibt. Welche Flüssigkeitsmenge ist nach einer Stunde aus diesem Behälter abgeflossen?

(5 VP)

Lösung:

a) Das maximale Fassungsvermögen des Behälters beträgt 1200l folglich ist eine Lösung der Gleichung f(t)=600 gesucht. Es folgt:
$1000-800e^{-0,01t} = 600 \Leftrightarrow 400=800e^{-0,01t} \Leftrightarrow 0,5=e^{-0,01t}$. Damit ist $t\approx 69,31$.

Ergebnis: Der Behälter ist nach ca. 69 Minuten halb voll.

Behauptung f ist streng monoton wachsend
Wenn f'(t)>0 für alle Werte von t gilt, so bedeutet dies, dass f an jeder Stelle eine Tangente mit positiver Steigung besitzt und das wiederum bedeutet, dass f streng monoton wachsend ist. Es gilt:
$f'(t) = -800\cdot(-0,01)\cdot e^{-0,01t} = 8e^{-0,01t} > 0$ da die e-Funktion für alle t positiv ist.

Ergebnis: f ist streng monoton wachsend.

Mittlere Flüssigkeitsmenge
Die mittlere Flüssigkeitsmenge während der ersten Stunde ist gegeben Durch $m=\frac{1}{60}\int_0^{60} f(t)\,dt$. Den Wert berechnen Sie mit dem GTR nach Eingabe von **MATH fnInt(Y1,X,0,60)÷60 ENTER**

Ergebnis: Die mittlere Flüssigkeitsmenge innerhalb der ersten Stunde beträgt etwa 398,4l.

Sicherheitsvorschriften

85% des Fassungsvermögens von 1200l sind 1020l. Die Frage ist also, ob für alle t>0 stets f(t)<1020 gilt. Da f streng monoton wachsend ist, lassen Sie einfach $t \to \infty$ gehen und schauen sich dabei die Funktionswerte an. Es folgt $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty}\left(1000-800\cdot e^{-0{,}01t}\right) = 1000$ da für $t \to \infty$ der Ausdruck $e^{-0{,}01t}$ eine Nullfolge ist. Das bedeutet, dass für alle Zeiten die Füllmenge unterhalb der Sicherheitsgrenze von 1020l bleibt.

Ergebnis: Die Sicherheitsvorschriften werden eingehalten.

b) Die momentane Änderungsrate ist gegeben durch B'(t)=Zufluss - Abfluss. Anhand der Aussagen im Text gilt folglich B'(t) = 10-0,01·B(t). Diese Gleichung hat die Form B'(t) = a - b·B(t), also ist a=10 und b=0,01.

Ergebnis: a = 10 und b = 0,01.

f genügt der angegebenen Differenzialgleichung

Setze einfach f(t) für B(t) ein und teste ob f'(t) herauskommt. Wenn ja, dann ist f eine Lösung dieser Differenzialgleichung. Es folgt 10-0,01·(1000-800$e^{-0{,}01t}$) = 10-10+ 8·$e^{-0{,}01t}$ = 8$e^{-0{,}01t}$ = f'(t), was zu beweisen war.

c) Neue Funktionsgleichung

Wenn Sie aus der Differenzialgleichung aus Teilaufgabe b) B'(t) = a-b·B(t) den Faktor b ausklammern erhalten Sie B'(t) = b(a/b - B(t)). In dieser Form erkennen Sie, dass es sich um beschränktes Wachstum mit S = a/b als obere Schranke handeln muss.
Wie in Teilaufgabe b) gilt für die neue Funktion g: g'(t) = Zufluss - Abfluss = 12 - 0,02·g(t). Ausklammern von 0,02 liefert g'(t) = 0,02·(600-g(t)) woraus Sie S = 600 als obere Schranke eines größenbeschränkten Wachstums ablesen. Eine solche Wachstumsform wird andererseits auch durch die Funktion g(t) = S - ae^{bt} beschrieben wobei b die momentane Abflussrate darstellt. Wegen S=600 und b=-0,02 folgt g(t)=600-a·$e^{-0{,}02t}$. Die Füllmenge zu Beginn der Messung betrug 200l, d.h. g(0)=200=600-a woraus a=400 folgt.

Ergebnis: Die gesuchte Funktion ist g(t) = 600-400$e^{-0{,}02t}$.

Abgeflossene Flüssigkeitsmenge

Sie haben einen Anfangsbestand von 200l. In einer Minute kommen 12l dazu, in einer Stunde sind es dann 12l·60=720l. g(60)=479,5 bedeutet, dass nach einer Stunde etwa 479,5l vorhanden sind. Die in dieser Zeit abgeflossene Menge ist dann gegeben durch Anfangsbestand + Zufluss - aktuelle Menge = 200 + 720 - 479,5 = 440,5.

Ergebnis: In einer Stunde sind etwa 440,5l abgeflossen.

Aufgabe I 3.2

Die Folge (a_n) ist gegeben durch a_0=5; a_{n+1}=10+0,8·a_n für $n \in \mathbb{N}$.
50 ist eine obere Schranke dieser Folge. Zeigen Sie damit, dass die Folge monoton wachsend ist.
Begründen Sie, dass die Folge konvergiert.
Berechnen Sie den Grenzwert exakt.

(4 VP)

Lösung:

Die Monotonie einer Folge wird in der Regel durch den Vergleich zweier benachbarter Folgenglieder nachgewiesen. Wenn stets a_{n+1}-$a_n \geq 0$ gilt, so ist die Folge monoton wachsend. Nun ist a_{n+1}=10+0,8·a_n also folgt a_{n+1}-a_n = 10+0,8·a_n-a_n = 10-0,2·a_n. a_n kann laut Aussage des Textes aber höchstens den Wert 50 annehmen, folglich ist stets 10-0,2·$a_n \geq 0$.

Ergebnis: Die Folge ist monoton wachsend.

Eine monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge besitzt immer einen Grenzwert, nennen wir ihn g. Für $n \to \infty$ gilt sowohl $a_n \to g$ als auch $a_{n+1} \to g$. Aus der Beziehung a_{n+1} = 10 + 0,8a_n wird für $n \to \infty$ die Gleichung g = 10+0,8g was sich auflöst zu g = 50.

Ergebnis: Der gesuchte Grenzwert ist g=50.