

Abiturprüfung Mathematik 2008 Baden-Württemberg Allgemeinbildende Gymnasien Wahlteil – Analysis I

Lösung der Aufgaben 1.1 und 1.2

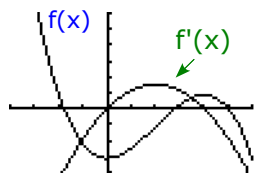
Klaus Messner, klaus_messner@web.de

b) In der Talsohle befindet sich ein Dorf, das bereits nachmittags im Schatten liegt. Nach dem Vorbild des italienischen Ortes Viganella soll auf dem höchsten Punkt des Höhenzugs östlich des Dorfes ein Gerüst mit einem drehbaren Spiegel zur Reflexion von Sonnenlicht aufgestellt werden. Auch hier wird der Querschnitt des Geländes durch das Schaubild der Funktion f beschrieben. Bestimmen Sie die Mindesthöhe dieses Gerüsts, bei der das Sonnenlicht den tiefsten Punkt des Geländequerschnitts erreichen kann. Wie hoch müsste das Gerüst werden, damit der gesamte Geländequerschnitt zwischen Dorf und Gerüst beleuchtet werden kann?

(6 VP)

Lösung:

a) Die Formulierung „am steilsten“ bedeutet, dass nach einem Wendepunkt auf der östlichen Seite gefragt ist. Diesen berechnen Sie mit dem GTR indem Sie sowohl f als auch f' über den Y-Editor eingeben.



Bei Y_1 geben Sie die Funktion f ein. f' geben sie bei Y_2 mit $nDeriv(Y_1, X, X)$. Justieren Sie das Koordinatensystem mit $x_{min}=-4$, $x_{max}=6$, $y_{min}=-4$, $y_{max}=6$. Mit **GRAPH** erhalten Sie die nebenstehende Abbildung.

Aufgabe I 1.1 (Schwerpunkte: ganzrationale Funktionen, vollständige Induktion)

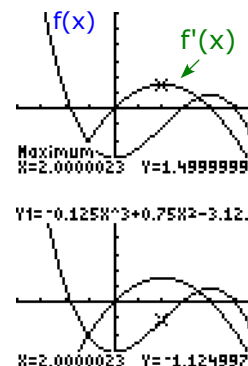
Ein Tal in den Bergen wird nach Westen von einer steilen Felswand, nach Osten von einem flachen Höhenzug begrenzt. Der Querschnitt des Geländes wird beschrieben durch das Schaubild der Funktion f mit

$$f(x) = -0,125x^3 + 0,75x^2 - 3,125 \quad \text{im Bereich } -2,5 \leq x \leq 5,$$

dabei weist die positive x -Achse nach Osten (1 LE entspricht 100m).

- a) Skizzieren Sie den Querschnitt des Geländes. Berechnen Sie die Stelle, an der die östliche Talseite am steilsten ist, und dann die Stelle, an der die westliche Talseite gleich steil ist. Quer zum Tal befindet sich in West-Ost-Richtung eine Staumauer. Vom tiefsten Punkt des Tals aus gemessen ist sie 312,5m hoch. Berechnen Sie die Breite der Staumauer an ihrer Oberkante. Bevor das Wasser aufgestaut wird, muss die dem See zugewandte Seite der Staumauer versiegelt werden. Bestimmen Sie den Inhalt dieser Fläche.

(8 VP)



Die Stelle des Hochpunkts von f' ist die Stelle des Wendepunkts von f . Den Hochpunkt von f' bestimmen Sie mit **2ND CALC maximum**. Sie erhalten $x=2$. Wenn Sie jetzt einmal \downarrow tippen, landen Sie genau an der Stelle $x=2$ also auf dem Wendepunkt von f . In der unteren Zeile lesen Sie die y -Koordinate ab mit $Y=-1,125$.

Ergebnis: Der Wendepunkt liegt bei etwa $W(2|-1,125)$.

Auf der anderen Seite des Tals ist ein Punkt gesucht, der genauso steil ist. Da auf dieser Seite des Tals die Steigungen alle negativ sind, kann mit dieser Formulierung nur „betragsmäßig genauso steil“ gemeint sein. Dazu bilden wir $f'(2)$ mit dem GTR. Mit **2ND CALC Quit** wechseln Sie in den Berechnungsmodus und geben dort $nDeriv(Y_1, X, 2)$ ein ($nDeriv$ erreichen Sie über **MATH**). Sie erhalten $f'(2) \approx 1,5$. Gesucht ist also eine Stelle auf der Kurve von f an der die Steigung den Wert $-1,5$ hat. Mit dem Gleichungslöser des GTR (**MATH solver**) lösen Sie nun die Gleichung $f'(x)+1,5=0$. Als Startwert verwenden Sie z.B. $X=-1$. Mit **ALPHA SOLVE** bekommen Sie eine Lösung bei $x=-0,828$.

Mit **GRAPH** wechseln Sie wieder in die Grafik-Anzeige und stellen dort mit **2ND CALC value** und der Eingabe von **-0,828 ENTER** den Funktionswert (von f) mit $y=-2,54$ fest.

Ergebnis: Im Punkt $P(-0,828|-2,54)$ haben wir auf der westlichen Hangseite betragsmäßig dieselbe Steigung wie im Wendepunkt.

Breite der Staumauer:

Wir benötigen die Nullstellen von $f(x)$. Der GTR liefert über **2ND CALC zero** zunächst $x_1=-1,79$ dann $x_2=2,79$. Der Abstand dazwischen ist dann die Breite der Staumauer, also $b=x_2-x_1=4,58$, gemessen in LE.

Ergebnis: Die Staumauer ist 458m breit.

Fläche der Staumauer:

Die Fläche der Staumauer berechnen Sie über das Integral $\int_{-1,79}^{2,79} f(x) dx$ mit dem GTR, z.B. mit **2ND CALC** $\int f(x) dx$.

Nach Eingabe der Intervallgrenzen zeichnet der GTR die Fläche und zeigt den Wert des Integrals mit $-9,02$ an. Wir nehmen den Betrag und beachten, dass eine LE 100m entspricht.

Ergebnis: Die Staumauer hat an der dem Tal zugewandte Seite eine Fläche von $A=90.200m^2$.

Das Gerüst steht auf dem Hochpunkt $H(4|0,875)$. Um die Koordinaten der obersten Turmspitze zu ermitteln setzen wir also $x = 4$ in die Tangentengleichung ein und erhalten $y=1,375$. Der Abstand zu H ist gegeben durch $h=1,375-0,875=0,5$.

Ergebnis: Das Gerüst mindestens 50m hoch sein, damit der Lichtstrahl der vom Spiegel reflektiert wird, die Talsohle erreichen kann.

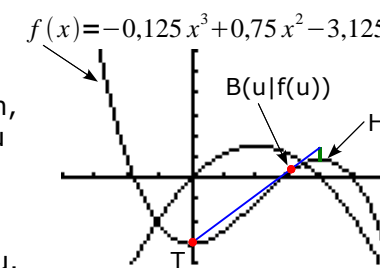
Wenn der Spiegel den Wendepunkt $W(2|-1,125)$ anleuchten kann, so kann er auch das gesamte Tal ausleuchten. Gesucht ist also zunächst die Gleichung der Tangente in W . Allgemein gilt für die Tangentengleichung:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Mit $f'(2)=1,5$ und $f(2)=-1,125$ folgt $y=1,5(x-2)-1,125$ also $y=1,5x-4,125$. Dies ist die gesuchte Tangentengleichung. Das Gerüst steht bei $x=4$, was eingesetzt in die Tangentengleichung $y=1,875$ liefert. Der Höhenunterschied zum Hochpunkt $H(4|0,875)$ ist $h=1,875-0,875=1$.

Ergebnis: Das Gerüst müsste mindestens 100m hoch sein, damit das gesamte Tal ausgeleuchtet werden kann.

b) Der Lichtstrahl des Spiegels muss den Tiefpunkt $T(0|-3,125)$ in der Tal-sohle erreichen. Das Gerüst muss also so hoch sein, dass die Verbindungslinie vom Spiegel aus zu T den östlichen Hang berührt. Diesen Berührungspunkt nennen wir B . Er liegt irgendwo auf dem Schaubild von f , deshalb setzen wir $B(u|f(u))$ mit einem noch zu bestimmenden u .



Die Gerade zwischen B und T ist die Tangente an f in B , deren Gleichung wir jetzt bestimmen. Mit $y=mx+b$ und $m=f'(u)=-0,375u^2+1,5u$ haben wir bereits die Steigung. Damit folgt: $y=(-0,375u^2+1,5u)x + b$. Da T auf der Tangente liegt können wir dessen Koordinaten einsetzen und erhalten:

$$y = (-0,375u^2 + 1,5u)x - 3,125$$

Wenn wir $x=u$ einsetzen erhalten wir $y=f(u)=-0,125u^3+0,75u^2-3,125$, denn B liegt ja ebenfalls auf der Tangente. Also gilt:

$$-0,125u^3+0,75u^2-3,125 = (-0,375u^2+1,5u)u-3,125$$

Auflösen nach u liefert eine quadratische Gleichung die zu den Lösungen $u_1=0$ und $u_2=3$ führt. $u_1=0$ kann keine Lösung sein, denn B ist nicht der Tiefpunkt. Sie setzen $u_2=3$ in die Tangentengleichung ein und erhalten nun die endgültige Form: $y=1,125x-3,125$.

Aufgabe I 1.2

Die Funktion g ist gegeben durch $g(x) = \frac{1}{1-2x}$; $x \neq 0,5$

Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass g für alle $n \geq 1$ die n -te Ableitung $g^{(n)}(x) = n! \cdot \frac{2^n}{(1-2x)^{n+1}}$ besitzt, wobei $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$ für $n \geq 1$ gilt. (4 VP)

Lösung:

Induktionsbeginn $n=1$:

$$\text{Linke Seite: } g'(x) = \frac{2}{(1-2x)^2}, \text{ rechte Seite: } g^{(1)}(x) = 1! \cdot \frac{2^1}{(1-2x)^{1+1}} = \frac{2}{(1-2x)^2}$$

Also gilt die Formel für $n=1$.

Induktionsannahme: Die Formel gelte für ein beliebiges k , d.h. es gilt

$$g^{(k)}(x) = k! \cdot \frac{2^k}{(1-2x)^{k+1}}$$

Induktionsbehauptung: Die Formel gilt für $k+1$: $g^{(k+1)}(x) = (k+1)! \cdot \frac{2^{k+1}}{(1-2x)^{k+2}}$

Induktionsschritt: Bilde $g^{(k+1)}(x)$ und unter Verwendung der Induktionsannahme prüfe, ob dabei die Induktionsbehauptung „herauskommt“.

$$\begin{aligned}
 g^{(k+1)}(x) &= (g^{(k)}(x))' = \left(k! \cdot \frac{2^k}{(1-2x)^{k+1}} \right)', && \text{Induktionsannahme} \\
 &= \frac{-k! \cdot 2^k (k+1) (1-2x)^k \cdot (-2)}{(1-2x)^{2(k+1)}} && \text{Kombinierte Anwendung von Quotientenregel und Kettenregel} \\
 &= \frac{k!(k+1) \cdot \underline{2^k \cdot 2} \cdot (1-2x)^k}{(1-2x)^{2k} (1-2x)^2} = \frac{(k+1)! \cdot 2^{k+1}}{(1-2x)^k (1-2x)^2} \\
 &= (k+1)! \frac{2^{k+1}}{(1-2x)^{k+2}} && \text{Dies ist die Induktionsbehauptung!}
 \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass die Formel für alle $n \geq 1$ gilt.