

Abiturprüfung Mathematik 2008 Baden-Württemberg Allgemeinbildende Gymnasien Pflichtteil

Lösungen

☞ Klaus Messner, klaus_messner@web.de

Aufgabe 2:

G ist eine Stammfunktion der Funktion g mit $g(x) = 2 - 3 \cdot \sin(4x)$.
Der Punkt P (0|1) liegt auf dem Schaubild von G.
Bestimmen Sie einen Funktionsterm von G. (2 VP)

Lösung:

Zunächst wird eine Stammfunktion gebildet:

$$G(x) = \int (2 - 3 \cdot \sin(4x)) dx = 2x + \frac{3}{4} \cos(4x) + C$$

Da P(0|1) auf G liegt, lässt sich C bestimmen. Mit $G(0)=1$ folgt:

$$1 = \frac{3}{4} \cos(0) + C \Leftrightarrow 1 = \frac{3}{4} + C \Leftrightarrow C = \frac{1}{4}$$

Daraus ergibt sich der gesuchte Funktionsterm:

$$G(x) = 2x + \frac{3}{4} \cos(4x) + \frac{1}{4}$$

Aufgabe 1:

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{2x^2}{2x^2-3}$.

Bilde Sie die Ableitung von f und fassen Sie diese so weit wie möglich zusammen. (2 VP)

Lösung:

Die Ableitung erfolgt nach der Quotientenregel:

$$f'(x) = \frac{4x \cdot (2x^2 - 3) - 2x^2 \cdot 4x}{(2x^2 - 3)^2} = \frac{-12x}{(2x^2 - 3)^2}$$

Aufgabe 3:

Lösen Sie die Gleichung $\frac{6}{x^4} + \frac{1}{x^2} = 1$ ($x \neq 0$). (3 VP)

Lösung:

Multipliziere zunächst beide Seiten mit dem Hauptnenner x^4 und erhalte:
 $6 + x^2 = x^4 \Leftrightarrow x^4 - x^2 - 6 = 0$. Ersetze $z = x^2$, um auf eine quadratische Form zu kommen: $z^2 - z - 6 = 0$. Die p-q-Formel liefert nun:

$$z_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} \Rightarrow z_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} \Rightarrow z_1 = 3, z_2 = -2$$

Nach Rückersetzung folgt: $x^2 = 3$ oder $x^2 = -2$

Aus der ersten Gleichung folgt $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = -\sqrt{3}$

Die zweite Gleichung ist in den reellen Zahlen nicht lösbar. Daher ist

$$L = \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$$

Aufgabe 4:

Für eine ganzrationale Funktion h zweiten Grades gilt: $T(-1|-4)$ ist Tiefpunkt und $Q(2|5)$ ein weiterer Punkt ihres Schaubilds. Ermitteln Sie eine Funktionsgleichung von h . (4 VP)

Lösung:

Ansatz: $h(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$T(-1|-4)$ ist ein Tiefpunkt, d.h. $h(1)=-4$ und $h'(-1)=0$. Mit $h'(x)=2ax + b$ folgt: I: $a-b+c = -4$ und II: $-2a+b = 0$. Auch Q liegt auf h , d.h. $h(2)=5$.

Das bedeutet III: $4a+2b+c = 5$.

Löse dieses Gleichungssystem mit dem Gauß'schen Eliminationsverfahren:

a	b	c			
1	-1	1		-4	← -
-2	1	0		0	
4	2	1		5	← +

1	-1	1		-4	
-2	1	0		0	
-9	0	0		-9	

$a=1, b=2, c=-3$

Die gesuchte Funktionsgleichung lautet:

$$h(x) = x^2 + 2x - 3$$

Aufgabe 5:

Gegeben sind die Schaubilder von vier Funktionen, jeweils mit sämtlichen Asymptoten:

Schaubild 1

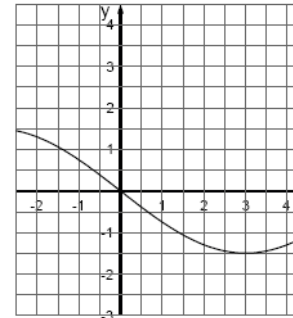


Schaubild 2

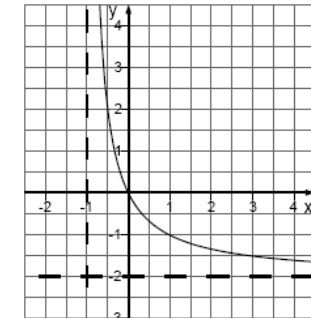


Schaubild 3

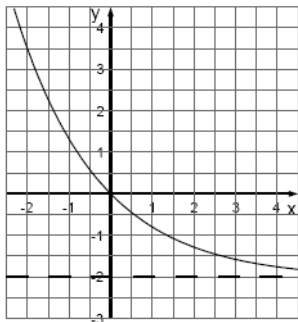
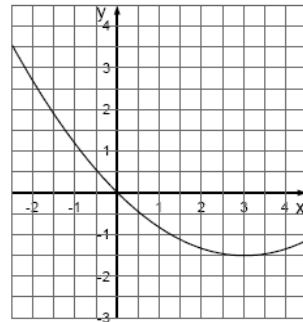


Schaubild 4



Drei dieser vier Schaubilder werden beschrieben durch die Funktionen f , g ,

und h mit $f(x) = \frac{-2x}{x+a}$, $g(x) = -2 + b \cdot e^{-0.5x}$, $h(x) = cx^2 - x$

a) Ordnen Sie den Funktionen f , g , und h das jeweils passende Schaubild zu.

Begründen Sie Ihre Zuordnung.

b) Bestimmen Sie die Werte für a und b .

(5 VP)

Lösung:

1. f hat eine waagrechte Asymptote bei $y=-2$, denn es gilt $\lim_{x \rightarrow \mp\infty} f(x) = -2$. Außerdem hat f eine Polstelle bei $x = -a$, denn an dieser Stelle wird der Nenner Null. **Schaubild 2** ist das einzige, das sowohl eine Polstelle als auch eine waagrechte Asymptote hat. f wird durch **Schaubild 2** dargestellt.

g hat ebenfalls eine waagrechte Asymptote, denn für $x \rightarrow \infty$ folgt

$$e^{-0.5x} = \frac{1}{e^{0.5x}} \rightarrow 0 \text{ und damit } g(x) \rightarrow -2. \text{ **Schaubild 3** ist das einzig noch}$$

verbleibende mit einer waagrichten Asymptote.

h ist eine quadratische Funktion, d.h. sie kann nur einen Extrempunkt haben. Damit ist **Schaubild 1** ausgeschlossen, es bleibt nur noch **Schaubild 4**.

2. Für eine Polstelle bei $x=-1$ muss der Nenner Null werden. Mit $-1+a=0$ folgt sofort $a=1$. In **Schaubild 3** liest man $g(0)=0$ ab. Damit folgt $-2+b=0$ also $b=2$.

$$\text{Ergebnis: } a=1, b=2$$

Aufgabe 6:

Gegeben sind die zwei parallelen Geraden g und h durch

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad s, t \in \mathbb{R}$$

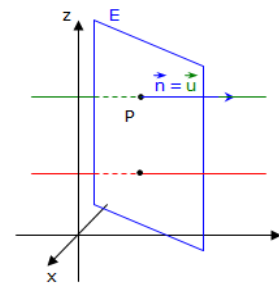
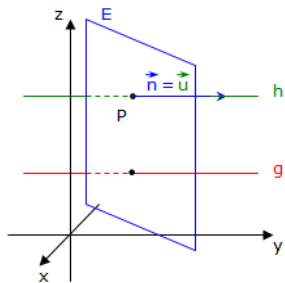
Bestimmen Sie den Abstand der beiden Geraden.

(5 VP)

Lösung:

Da g und h parallel sind, reicht es, wenn Sie sich einen beliebigen Punkt auf einer Geraden aussuchen und den Abstand zur anderen Geraden bestimmen. Hierfür nehmen wir einfach den Stützvektor von h , was dem Punkt $P(1|2|5)$ entspricht.

Stellen Sie sich nun eine zu g senkrechte Ebene E vor, die den Punkt P enthält. Der Richtungsvektor von g kann als Normalenvektor von E fungieren. In der Koordinatenform der Ebenengleichung $E: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ stellen die Koeffizienten a, b, c die Koordinaten des Normalenvektors dar.



Das liefert den Ansatz:

$E: 3x_1 - 4x_2 + x_3 = d$. Da P in E enthalten ist bekommen Sie durch Einsetzen $3 \cdot 1 - 4 \cdot 2 + 5 = 0 = d$. Jetzt haben Sie die komplette Ebenengleichung $E: 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 0$. Durch Einsetzen von g in E ermitteln Sie den Schnittpunkt S von g mit E . Es folgt $3(2+3s) - 4(9-4s) + (4+s) = 0 \Leftrightarrow 26s - 26 = 0$. Somit ist $s = 1$. Eingesetzt in g erhalten Sie den Schnittpunkt $S(5|5|5)$.

Der Abstand der beiden Geraden ist dann gegeben durch den Abstand von P und S . Es gilt:

$$|\vec{PS}| = \left| \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4^2 + 3^2 + 0^2} = \underline{\underline{5}}$$

Ergebnis: g hat zu h einen Abstand von 5LE.

Aufgabe 7:

Die Ebene E geht durch die Punkte $A(1,5|0|0)$, $B(0|3|0)$ und $C(0|0|6)$.

Untersuchen Sie, ob die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad t \in \mathbb{R}$ parallel zur Ebene E verläuft. (3 VP)

Lösung:

Teste, ob g und E gemeinsame Schnittpunkte haben. Wenn nicht, dann ist $g \parallel E$. Aus den 3 Punkten ermittle zunächst die Ebenengleichung:

$$\begin{aligned} E: \vec{x} &= \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + t \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1,5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1,5 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Gleichsetzen von g und E liefert:

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1,5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1,5 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -5,5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1,5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1,5 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} - r \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aufschlüsseln in die Koordinatengleichungen und Lösen des Gleichungssystems:

s	t	r	$-5,5$	$\cdot 2$	s	t	r	$-5,5$
$-1,5$	$-1,5$	2	2	$\leftarrow +$	$-1,5$	$-1,5$	2	$-5,5$
3	0	-3	3	$\leftarrow +$	0	-3	1	-9
0	6	-2	3	$\leftarrow +$	0	0	0	-15
$-1,5$	$-1,5$	2	$-5,5$	$\leftarrow +$	0	-3	1	-9
0	-3	1	3	$\leftarrow +$	0	6	-2	3

Die letzte Zeile bedeutet $0r = -15$, was nicht möglich ist. Das Gleichungssystem ist nicht lösbar, folglich haben g und E keine gemeinsamen Punkte.

Ergebnis: g ist parallel zu E .

Aufgabe 8:

Gegeben sind die beiden Ebenen $E_1: (\vec{x} - \vec{p}_1) \cdot \vec{n}_1 = 0$ und $E_2: (\vec{x} - \vec{p}_2) \cdot \vec{n}_2 = 0$.
Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man anhand dieser Normalen-
gleichungen die gegenseitige Lage der beiden Ebenen untersuchen kann.

(3 VP)

Lösung:

Zunächst testet man ob die beiden Normalenvektoren linear abhängig, d.h. Vielfache voneinander sind. Falls nicht, so schneiden sich die Ebenen in einer Geraden.

Falls die Normalenvektoren linear abhängig sind, könnten die beiden Ebenen parallel oder identisch sein. Es reicht einen Punkt der einen Ebene zu nehmen und zu testen, ob dieser in der zweiten Ebene liegt. Ist dies der Fall, so sind die Ebenen identisch, andernfalls sind sie parallel.