

Abiturprüfung Mathematik 2020
Baden-Württemberg
Allgemeinbildende Gymnasien
Pflichtteil
Lösungen

Pflichtteil 2020

Aufgabe 1

Bilden Sie eine Ableitung der Funktion f mit $f(x) = x^2 \cdot e^{-5x}$.

(2 VP)

Lösung:

Unter Verwendung von Produkt- und Kettenregel folgt:

$$f'(x) = 2x \cdot e^{-5x} - x^2 \cdot e^{-5x} \cdot 5$$

Dies kann z.B. durch Ausklammern von $x \cdot e^{-5x}$ weiter vereinfacht werden:

$$\underline{f'(x) = x e^{-5x} (2 - 5x)}$$

Pflichtteil 2020

Aufgabe 2

Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion F der Funktion f mit $f(x) = \sqrt{4x - 7}$, für die $F(2) = 1$ ist.

(1,5 VP)

Lösung:

Zunächst bilden wir eine Stammfunktion von $f(x) = \sqrt{4x - 7} = (4x - 7)^{\frac{1}{2}}$.

$$\text{Es folgt: } F(x) = \int (4x - 7)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{4} \frac{(4x-7)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{6} (4x - 7)^{\frac{3}{2}} + C$$

Wegen $F(2) = 1$ muss also $\frac{1}{6} (4 \cdot 2 - 7)^{\frac{3}{2}} + C = 1$ gelten. Damit folgt:
 $\frac{1}{6} + C = 1$ also $C = 5/6$. Damit haben wir die Lösung:

$$\underline{F(x) = \frac{1}{6} (4x - 7)^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{6}}$$

Pflichtteil 2020

Aufgabe 3

Lösen Sie die Gleichung $(x^2 + 8) \cdot (e^{x-1} - 1) = 0$.

(1,5 VP)

Lösung:

Ein Produkt wird genau dann 0, wenn einer der beiden Faktoren 0 wird.

Nun $x^2 + 8 = 0 \Rightarrow x^2 = -8$ keine reelle Lösung.

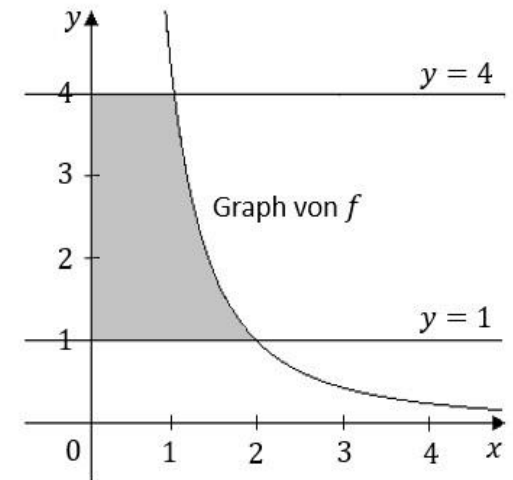
Aber $e^{x-1} - 1 = 0 \Rightarrow e^{x-1} = 1$ hat genau eine Lösung für $x = 1$.

Ergebnis: $x = 1$ die einzige Lösung der obigen Gleichung.

Pflichtteil 2020

Aufgabe 4)

Der Graph der Funktion f mit $f(x) = \frac{4}{x^2}$ schneidet die Gerade mit der Gleichung $y = 4$ im Punkt $P(1|4)$ und die Gerade mit der Gleichung $y = 1$ im Punkt $Q(2|1)$. Berechnen Sie den Inhalt der markierten Fläche.



(1,5 VP)

Pflichtteil 2020

$$f(x) = \frac{4}{x^2}$$
$$P(1|4), Q(2|1)$$

Lösung Aufgabe 4

Idee: Wir bestimmen die Fläche unter der Kurve, zwischen $x = 1$ und $x = 2$, ziehen das in der Abbildung, blau eingezeichnete Quadrat ab und zählen das graue Rechteck dazu.

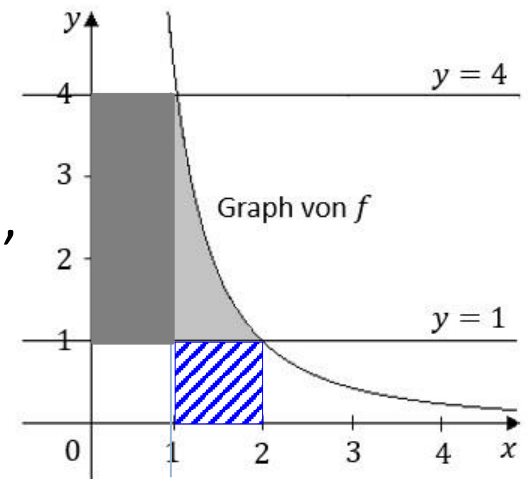
Das ist die gesuchte Fläche.

$$A = \int_1^2 \frac{4}{x^2} dx = \int_1^2 4 \cdot x^{-2} dx = [-4x^{-1}]_1^2 = \left[-\frac{4}{x}\right]_1^2 = (-2) - (-4) = 2$$

$A_{\text{Quadrat}} = 1$ (kann man direkt an den Abmessungen sehen)

$A_{\text{Rechteck}} = 3 \cdot 1 = 3$ (kann man ebenfalls an den Abmessungen sehen)

Es folgt: $A = 2 - 1 + 3 = 4$



Ergebnis: Die gesuchte Fläche beträgt 4LE².

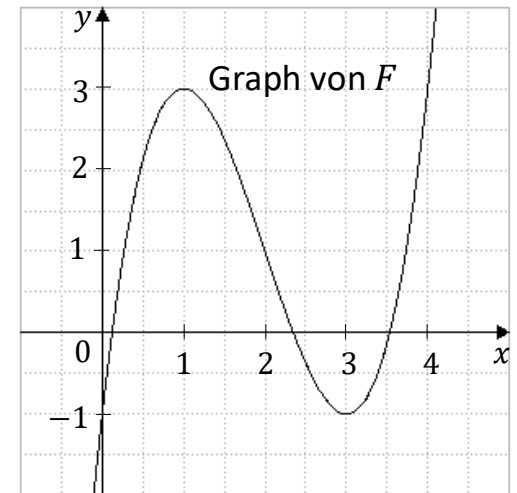
Pflichtteil 2020

Aufgabe 5

Abgebildet ist der Graph einer Funktion F .

F ist Stammfunktion einer ganzrationalen Funktion f .

- Geben Sie eine Nullstelle von f im abgebildeten Bereich an.
- Bestimmen Sie $\int_1^2 f(x) dx$.
- Begründen Sie, dass die Funktion f im Bereich $0,5 \leq x \leq 1,5$ streng monoton fallend ist.



(2,5 VP)

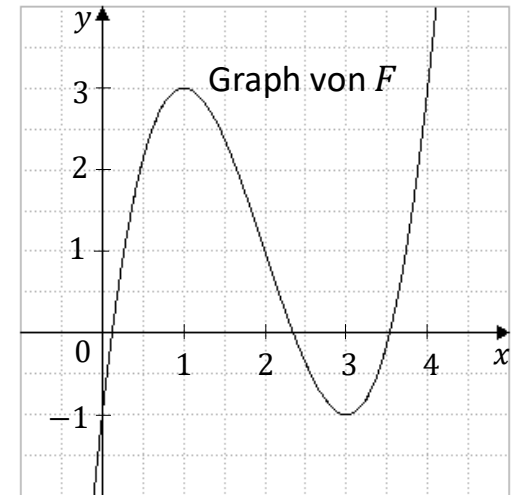
Pflichtteil 2020

Lösung Aufgabe 5 a)

Da F eine Stammfunktion von f ist, gilt $f = F'$,
d.h. f ist die Ableitung von F .

F besitzt bei $x = 1$ ein Maximum und bei $x = 3$
ein Minimum, daher hat f dort Nullstellen.

Ergebnis: f hat im abgebildeten Bereich Nullstellen bei $x = 1$ und $x = 3$.



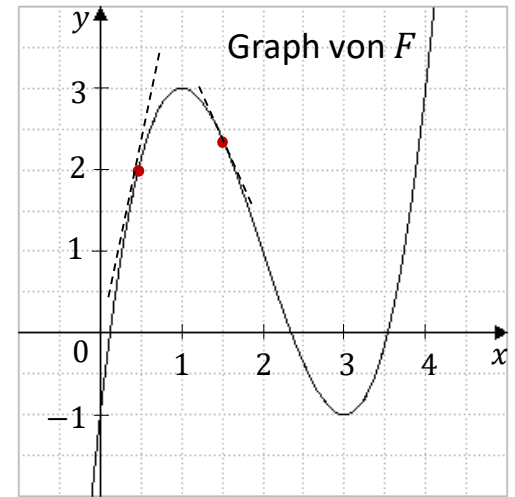
Pflichtteil 2020

Lösung Aufgabe 5 b)

Es gilt $\int_1^2 f(x) dx = F(2) - F(1)$.

Aus dem Schaubild liest man $F(2) = 1$
und $F(1) = 3$ ab.

Ergebnis: $\int_1^2 f(x) dx = 1 - 3 = \underline{-2}$



Lösung Aufgabe 5 c)

Die Funktion F besitzt bei $x = 0,5$ und bei $x = 1,5$ jeweils eine Wendestelle. Da $f = F'$ gilt, nimmt f beginnend bei $x = 0,5$ (der Stelle der stärksten Steigung) den größten und bei $x = 1,5$ (der Stelle mit dem stärksten Gefälle) den kleinsten Wert an. Da die Werte dazwischen stets abnehmen gilt f ist im Bereich $0,5 \leq x \leq 1,5$ streng monoton fallend, wie behauptet.

Pflichtteil 2020

Aufgabe 6

Gegeben sind die Ebenen $E: 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$ und $F: 2x_2 + x_3 = 4$.

- Stellen Sie die beiden Ebenen in einem gemeinsamen Koordinatensystem dar.
- Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden der beiden Ebenen.
- Berechnen Sie den Abstand des Punktes $O(0|0|0)$ von der Ebene E .

(5 VP)

$$E: 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$$
$$F: 2x_2 + x_3 = 4$$

Pflichtteil 2020

Lösung Aufgabe 6 a)

Darstellung der Ebenen $E: 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$ und $F: 2x_2 + x_3 = 4$.

Wir ermitteln zunächst jeweils die Spurpunkte von E , indem wir jeweils zwei Koordinaten Null setzen und nach der dritten auflösen. Dadurch erhalten wir für E : $S_1(3|0|0)$, $S_2(0|3|0)$ und $S_3(0|0|6)$.

Analog erhalten wir für F die Spurpunkte $T_2(0|2|0)$, $T_3(0|0|4)$.

(Beachte, dass in der Gleichung für F keine x_1 -Koordinate vorkommt.

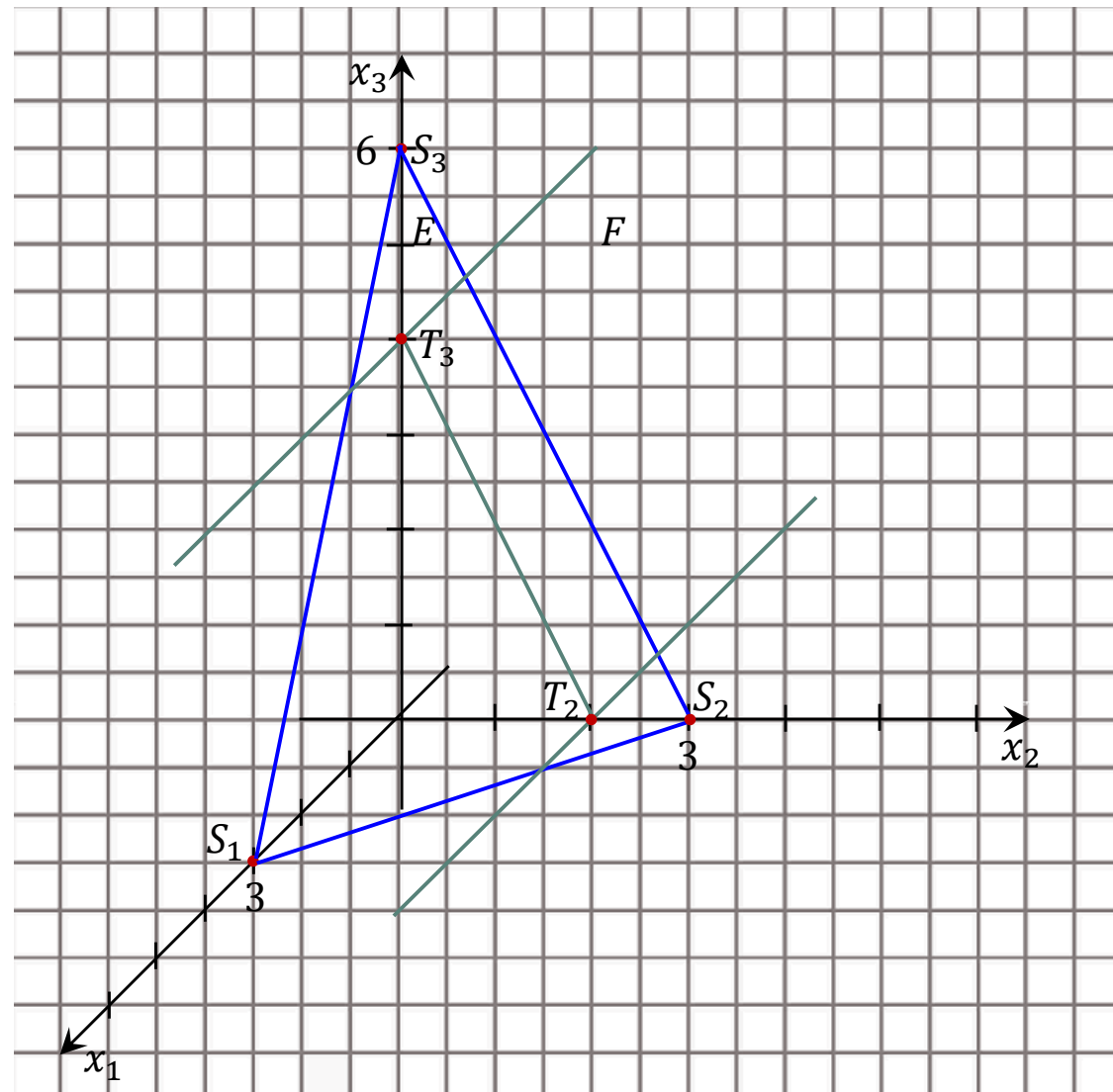
Das bedeutet, dass F keinen Schnittpunkt mit der x_1 -Achse hat und wir daher x_1 frei wählen können, z.B. wie hier $x_1 = 0$).

Nun zeichnet man die Spurpunkte in ein Koordinatensystem ein und verbinde diese. Unter Beachtung, dass F parallel zur x_1 -Achse verläuft erhält man folgendes Schaubild:

$$E: S_1(3|0|0), S_2(0|3|0), S_3(0|0|6)$$
$$F: T_2(0|2|0), T_3(0|0|4)$$

Pflichtteil 2020

Schaubild der Ebenen
 E und F :



$$E: 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$$

$$F: 2x_2 + x_3 = 4$$

Pflichtteil 2020

Lösung Aufgabe 6 b)

Ermittlung der Schnittgeraden

Wir schreiben beide Ebenengleichungen untereinander und lösen das so entstehende LGS:

$$I. \quad 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$$

$$II. \quad \quad \quad 2x_2 + x_3 = 4$$

Abziehen beider Gleichungen voneinander liefert $2x_1 = 2$ also $x_1 = 1$.

In Gleichung *II*. können wir eine Variable frei wählen, z.B. $x_3 = t$ mit $t \in \mathbb{R}$.

Umstellen nach x_2 liefert $2x_2 = 4 - t$ also $x_2 = 2 - \frac{1}{2}t$.

Pflichtteil 2020

$$\begin{aligned}x_1 &= 1 \\x_2 &= 2 - \frac{1}{2}t \\x_3 &= t\end{aligned}$$

Wir schreiben die bisher gefundene Lösung als Vektor: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 - \frac{1}{2}t \\ t \end{pmatrix}$.

„Auseinanderziehen“: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ergebnis: Die Schnittgerade der Ebenen E und F kann beschrieben werden

durch $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$.

Pflichtteil 2020

Lösung Aufgabe 6 c)

Abstand des Punktes $O(0|0|0)$ von der Ebene E

Den Normalenvektor lesen wir aus der Koordinatengleichung ab: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Seine Länge ist $|\vec{n}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3$. Die HNF der Ebene E lautet demnach: $HNF E: \frac{2x_1 + 2x_2 + x_3 - 6}{3} = 0$.

Einsetzen der Koordinate von O liefert den Abstand zu E :

$$d(O, E) = \frac{|2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 0 - 6|}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

Ergebnis: Der Punkt $O(0|0|0)$ hat zur Ebene E den Abstand 2 LE.

Pflichtteil 2020

Aufgabe 7

Eine Gerade ist orthogonal zur Ebene $E: x_1 - x_3 = 5$ und schneidet die x_1 -Achse in einem Punkt, der vom Punkt $P(0|2|1)$ den Abstand 3 hat. Bestimmen Sie eine Gleichung einer solchen Geraden.

(2,5 VP)

Pflichtteil 2020

Lösung Aufgabe 7

Für die gesuchte Geradengleichung benötigen wir einen Punkt (Stützvektor) und einen Richtungsvektor. Die Gerade soll senkrecht zu E sein, also nehmen wir den Normalenvektor von E als Richtungsvektor.

Bekanntlich kann man den Normalenvektor an den Koeffizienten vor den „ x “ ablesen, also $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Das ist unser Richtungsvektor.

Die Gerade schneidet die x_1 -Achse in einem Punkt, der zum Punkt $P(0|2|1)$ den Abstand 3 hat. Ein beliebiger Punkt auf der x_1 -Achse wird durch $Q(t|0|0)$ beschrieben, mit $t \in \mathbb{R}$. Der Abstand von P zu Q ist dann

$$d = \left| \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} t \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{t^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{t^2 + 5}$$

Pflichtteil 2020

$$E: x_1 - x_3 = 5$$
$$d = \sqrt{t^2 + 5}$$
$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Dieser Abstand soll den Wert 3 haben, d.h. $\sqrt{t^2 + 5} = 3$.

Quadrieren auf beiden Seiten führt zu $t^2 + 5 = 9 \Rightarrow t^2 = 4$

$\Rightarrow t_1 = 2, t_2 = -2$

Daraus ergeben sich die beiden möglichen Stützvektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Somit haben wir zwei mögliche Geraden, die alle Bedingungen erfüllen.

Ergebnis: Die beiden möglichen Geradengleichungen lauten

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R},$$

$$g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Pflichtteil 2020

Aufgabe 8

Auf einem Tisch liegen verdeckt vier rote und zwei schwarze Karten, mit denen Anna und Bernd das folgende Spiel spielen: Anna deckt in der ersten Runde nacheinander zwei Karten auf und legt sie nebeneinander auf den Tisch. Ist darunter mindestens eine schwarze Karte, so gewinnt Anna und das Spiel ist beendet. Andernfalls deckt Bernd nacheinander zwei der übrigen Karten auf. Deckt er dabei mindestens eine schwarze Karte auf, so gewinnt er, ansonsten gewinnt Anna.

Bestimmen Sie für die folgenden Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeiten:

A: Anna gewinnt das Spiel in der ersten Runde.

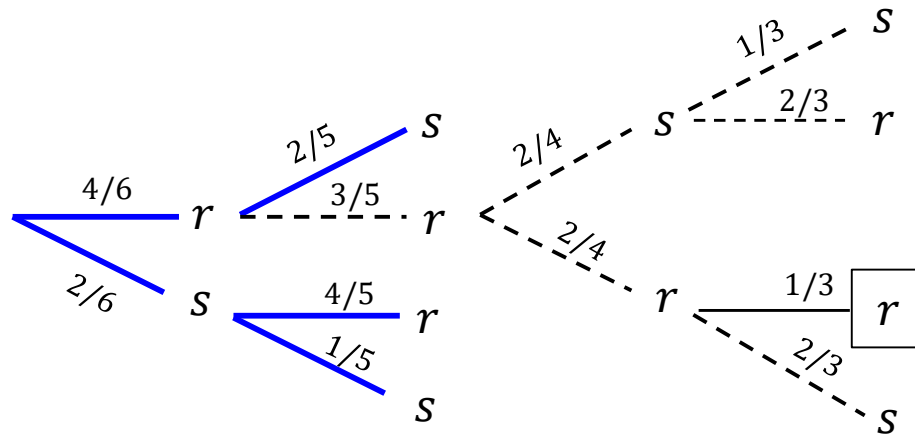
B: Anna gewinnt das Spiel.

(2,5 VP)

Pflichtteil 2020

Lösung Aufgabe 8

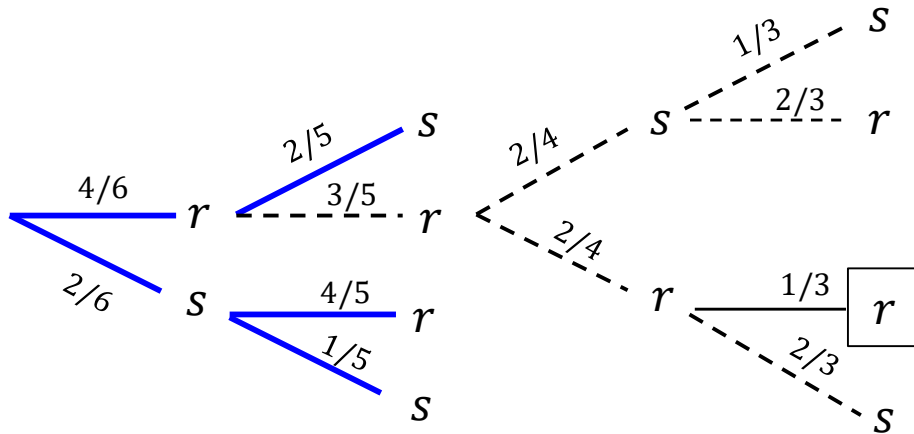
Zunächst zeichnen wir einen Ereignisbaum mit den jeweiligen Wahrscheinlichkeiten:



Die blaue Markierung steht für Annas Sieg in der ersten Runde, die gestrichelten Linien zeigen Bernds Sieg.

Die quadratischen Rahmen stehen für Annas Sieg in der zweiten Runde.

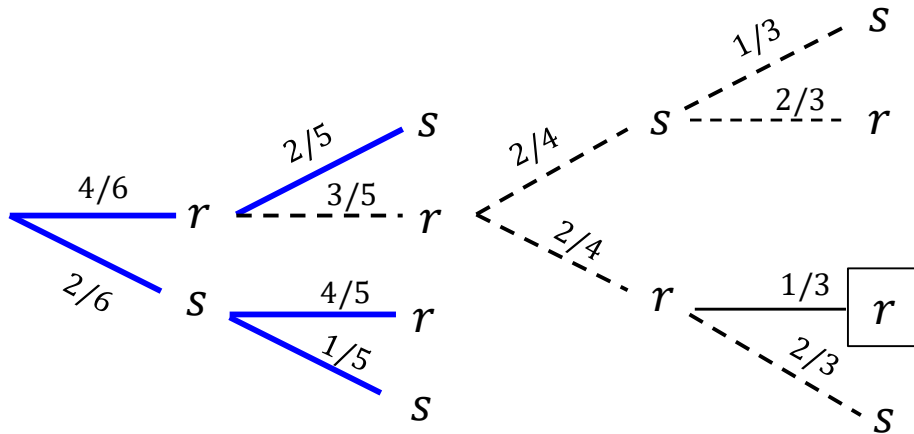
Pflichtteil 2020



Wharscheinlichkeit A : Anna gewinnt das Spiel in der ersten Runde.

$$P(A) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{8}{30} + \frac{8}{30} + \frac{2}{30} = \frac{18}{30} = \frac{9}{15} = 0,6$$

Pflichtteil 2020



Wharscheinlichkeit B : Anna gewinnt.

$$P(B) = P(A) + \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{9}{15} + \frac{2}{30} = \frac{18}{30} + \frac{2}{30} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

Pflichtteil 2020

Ergebnis:

Die Wahrscheinlichkeit A für Annas Sieg in der ersten Runde ist $\frac{9}{15} = 0,6$ (bzw. 60%).

Die Wahrscheinlichkeit B für Annas Sieg ist $\frac{2}{3} = 0,\overline{6}$ (bzw. $\approx 66,67\%$).